

Matite - Orettole - Przetqzyw

Le immagini mentali dei testi delle situazioni-problema influenzano *davvero* la risoluzione?

Sunto. *In questo lavoro si discute un'opinione largamente diffusa, secondo la quale un bambino, all'atto di accingersi alla risoluzione di un problema, deve farsi un modello il più possibile completo e corretto della situazione descritta dal testo, altrimenti corre il rischio di non poter risolvere il problema stesso. Si propongono delle prove il cui esito sembra smentire almeno in parte questa opinione.*

Summary. *In this paper is discussed the prevailing opinion that a child before facing a problem, has to get the most complete and correct model of the situation described in the text, otherwise he could not be able to solve it. Some tests are proposed: their results seem to confute, at least in part, this opinion.*

319. D'Amore B. (1997). Matite - Orettole - Przetqzyw. Le immagini mentali dei testi delle situazioni-problema influenzano davvero la risoluzione? *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 20A, 3, 241-256. [Questo articolo è stato pubblicato in lingua spagnola: *Suma*, 26, 1997, 111-116. In lingua francese in: Gagatsis A. (ed) (1999). *A multidimensional approach to learning in mathematics and science* Nicosia: Intercollege. 25-36].

Bruno D'Amore

Matite - Orettole - Przxetqzyw

**Le immagini mentali dei testi
delle situazioni-problema
influenzano *davvero* la risoluzione?**

Bruno D'Amore

**Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica
Dipartimento di Matematica
Università di Bologna
Bologna, Italia**

**Istituto per l'Abilitazione e l'Aggiornamento dei docenti
Repubblica e Cantone del Ticino
Locarno, Svizzera**

Lavoro eseguito con supporto economico del C.N.R. e del Ministero della Università e della Ricerca.

1. Il problema.

È opinione assolutamente diffusa che la risoluzione di un problema di matematica sia facilitata o addirittura resa possibile dalla capacità che ha il risolutore di farsi un modello mentale della situazione descritta nel testo del problema stesso. Per avvalorare questa posizione, si fa spesso riferimento a [Paivio 1986]¹ oppure a [Vergnaud 1985] che scrive (la sottolineatura è mia):

«La rappresentazione linguistica non è una sorta di riflesso del processo di adattamento del soggetto al suo ambiente; essa è al contrario funzionale e indispensabile al trattamento delle situazioni problematiche da parte del soggetto».

Durante la stesura iniziale del mio libro *Problemi* (dunque tra il 1990 ed il 1991) [D'Amore 1993], mi posi la questione seguente: supponiamo che il risolutore potenziale, posto di fronte al testo di un problema, *non possa* immaginarsi la situazione descritta nel testo stesso per motivi obiettivi, per esempio legati alle modalità di scrittura di esso; risolverà lo stesso, per nulla, o con che differenza, il problema, rispetto al caso in cui sia messo in grado di immaginarsi la situazione descritta in ogni suo dettaglio?

Feci allora l'ipotesi, che mi sembrava del tutto condivisa ed anzi preconizzata da [Paivio 1986] e [Johnson-Laird 1983], che una impossibilità obiettiva di immaginarsi il modello della situazione dovesse *necessariamente* ostacolare la risoluzione corretta del problema.

Inoltre, nel cercare modalità per rendere impossibile² il formarsi del modello della situazione descritta, rifacendomi a quel che afferma [Vergnaud 1985], studiai il caso in cui il testo di un problema contiene un termine sconosciuto al risolutore. In verità, mi limitai a due sole tipologie di soggetti: bambini di scuola elementare (II ciclo: 8-11 anni) ed insegnanti di scuola dell'infanzia (la scuola dell'infanzia, in Italia, si rivolge a bambini di età 3-6).

¹ Un'ottima presentazione del lavoro di Paivio è in [Vecchio 1990].

² in ogni suo dettaglio, cioè compresi i singoli oggetti di cui si parla nel testo, i personaggi, i passaggi di consegna e di ruoli, l'ambiente, eccetera

Un primo testo, proposto alla fine della IV elementare (dunque a bambini di 9-10 anni di età), riguardava un classico problema-esercizio di ricavo-spesa-guadagno: un cartolaio acquistava delle *risme* di carta ad una certa somma e le rivendeva ad un'altra; si chiedeva il guadagno per ogni risma.

Trattandosi di un ordinario problema-esercizio di un tipo molto diffuso nel II ciclo della scuola elementare, avevo supposto che un'eventuale mancata risoluzione dovesse necessariamente riguardare la presenza di quella parola evidenziata con il corsivo: *risma*.

La prova fu fatta con pochi allievi (una mezza classe: 12) sia perché avevo dato per scontata la risposta, accettando le posizioni solitamente attribuite a Paivio, Johnson-Laird e Vergnaud, che ritenevo convincenti; sia perché volevo avere la sicurezza di poter cogliere ogni segnale (esplicito e non) dagli allievi e poterli poi intervistare io stesso subito dopo la prova.

Il risultato fu esattamente quello atteso, tale da togliere ogni dubbio: ci fu un'ondata quasi violenta di generale disappunto, di rifiuto della consegna e più d'un allievo evidenziò l'incomprensione del termine sotto prova e *dunque*³ l'impossibilità di risolvere il problema.

Successivamente, durante un corso di aggiornamento per insegnanti di scuola dell'infanzia, sottoposi ad una ventina di insegnanti un analogo problema ma, supponendo che le insegnanti conoscessero la parola "risma", decisi di sostituirla con una parola inesistente: "plucca". Anche in tal caso ebbi una reazione violenta ed ironica all'un tempo, del tipo: «Ma che cosa sono le "plucche"?». Io insistetti, invitando le insegnanti a dirmi se il problema fosse o no risolubile ugualmente, anche senza conoscere quella parola; e la risposta fu positiva, sì, ma con la denuncia esplicita di un malessere... Ne *dedussi*⁴ che un adulto avrebbe potuto aggirare l'ostacolo provocato dalla non conoscenza di una parola, a dispetto delle posizioni di Paivio, Johnson-Laird e Vergnaud, ma **non** un bambino di scuola elementare.

Le prove effettuate avevano lo scopo detto: darmi la certezza che quelle tesi fossero accettabili ed io potessi sostenerle durante la stesura definitiva di *Problemi*.

Tuttavia...

³ Questo **mio** frettoloso *dunque* di allora è il fulcro del mio attuale lavoro.

⁴ Questa **mia** frettolosa *deduzione* di allora è anch'essa alla base del mio lavoro di oggi.

2. Domande di oggi ed ipotesi di risposta.

Tuttavia il numero esiguo di soggetti esaminati e l'evidentemente lacunoso apparato di controllo messo in atto per la prova mi aveva lasciato sempre dubbioso. Mi ripromisi allora, una volta che *Problemi* fosse uscito a stampa, di rifare le prove con estrema cura, anche se, devo confessarlo, in realtà credevo alle ipotesi dette in **1**.

Tra il novembre 1993 ed il dicembre 1995 ho avuto la possibilità di effettuare con accuratezza molto maggiore la prova, allo scopo di verificare quale fosse la risposta alla seguente domanda che ora porrò in modo esplicito:

Se il testo di un problema-esercizio standard, dato per iscritto in condizioni-classe standard, contiene una parola (facente riferimento all'oggetto di cui si tratta nel testo stesso) inesistente o che l'allievo non conosce, allora ciò rende impossibile che egli si faccia un modello mentale della situazione descritta in tale testo, in modo perfetto in ogni dettaglio.

Ebbene: con che percentuale diminuisce in tali condizioni la capacità di risolvere problemi?

La mia ipotesi, per quanto detto sopra, era che vi dovesse essere una netta diminuzione; e che, a richiesta esplicita, gli allievi denunciassero proprio, come causa del fallimento, la presenza di tale parola.

3. Le modalità di svolgimento delle prove.

Ho allora elaborato 2 testi (T1 e T2) di problema-esercizio standard:

Il signor Piero fa il commerciante. Compra 625 x a L. 500 l'una e le rivende tutte, incassando L. 480.000. Quanto guadagna per ogni x?

Nel test T1, al termine x era sostituita la parola *matita*; mentre nel test T2 la "parola" *orettola* (naturalmente, entrambe declinate secondo numero, singolari o plurali all'occorrenza).

I due testi erano scritti su un foglio a quadretti formato A4, a macchina, in alto; al centro del foglio stava un ampio riquadro; gli studenti erano invitati a scrivere la risposta al problema all'interno del riquadro (con penna biro scura e senza usare gomme o cancellatori vari). Sotto al riquadro, ogni studente doveva indicare se avesse trovato difficile o no il problema e, in caso positivo, indicare il perché della difficoltà.

Era stata data la consegna del lavoro singolo, in assoluto silenzio. Volevo evitare, questa volta, che l'osservazione a voce alta di un singolo studente potesse inficiare o condizionare il lavoro degli altri ed invitarli a riflettere su qualcosa che da soli avrebbero invece anche potuto non percepire.

Ogni classe era divisa in due parti: a metà classe era dato il test T1, all'altra il T2. Ciò per controllare quanti studenti erano in grado di svolgere il problema T1 e quanti T2, onde poter confrontare tali percentuali.

La prova è stata fatta in V elementare (allievi di 10-11 anni) e gli studenti sottoposti a prova sono stati in totale: 107.

Onde poter considerare la prova come avvenuta in condizioni scolastiche standard, ho evitato di entrare in aula, affidando la prova ad alcuni insegnanti di assoluta fiducia, ai quali avevo raccomandato di non interferire in alcun modo con il lavoro scritto degli allievi, sorvegliando che fossero del tutto rispettate le mie richieste⁵.

4. Primi risultati.

Vediamo i risultati del test T1 (matite):

hanno sbagliato del tutto l'esercizio: 32%

non hanno eseguito (o hanno scritto solo qualche indicazione): 10%

hanno risolto in modo del tutto esatto (a parte la forma): 15%

hanno sbagliato ma non in modo totale: 43% [di questi, il 41% calcola solo il guadagno totale (mentre la richiesta del problema parlava di guadagno *per ogni* matita); mentre il 2% svolge quasi tutti i calcoli, ma con procedura incompleta].

⁵ Devo dire, a questo punto, che ho tuttavia preferito cestinare i protocolli di un'intera classe, avendo avuto un dubbio sulle modalità di conduzione della prova.

Vediamo ora i risultati del test T2 (orettole):

hanno sbagliato del tutto l'esercizio: 25%

non lo eseguono: 10%

lo fanno esatto (a meno di errori di calcolo ed a parte la forma): 16%

hanno sbagliato, ma non in modo totale: 49% [di questi, il 37% calcola solo il guadagno totale; mentre il 12% commette altri errori].

Onde poter utilizzare al meglio i dati, all'apparenza poco significativi, raccogliamoli sotto classi più adatte alla nostra specifica indagine.

Allo scopo, occorre notare che l'errore di calcolare il guadagno totale al posto di quello di ogni singolo oggetto acquistato è, a detta degli insegnanti, tipico per gli studenti di V elementare; esso è motivato da un'affrettata lettura del testo o dall'usuale desiderio (persistente anche quando esplicitamente condannato dall'insegnante) di terminare la prova nel minor tempo possibile e consegnare il foglio.

Propongo allora di considerare le sole due seguenti classi:

esatto o sbagliato perché calcola il guadagno totale: E

del tutto errato o non eseguito o sbagliato con errori gravi: N.

In tal caso, le percentuali diventano:

per T1: E 56%, N 44%

per T2: E 53%, N 47%.

Visto il numero relativamente basso degli studenti esaminati, si tratta sostanzialmente di *percentuali identiche*.

Vale inoltre la pena di fare alcune note.

Nota 1. Due soli studenti (del gruppo T2) hanno denunciato per iscritto sul fondo del loro foglio il disagio provocato dalla parola "orettola"; e si tratta *in entrambi i casi* di studenti che hanno poi risolto bene l'esercizio.

Nota 2. Al termine delle prove, 13 studenti (tra coloro che erano stati sottoposti al test T2) sono stati intervistati. Di essi, e solo *dopo* esplicita richiesta da parte dell'intervistatore, solo 2 hanno detto di essere stati imbarazzati di fronte alla lettura della parola "orettole". Di questi 2, uno dice che le orettole «devono essere delle verdure» (vendute da un cartolaio!, ma su questo l'intervistatore non ha fatto commenti) e poi sbaglia l'impostazione della risoluzione (gruppo N); l'altro dice che si tratta di «oggetti» e risolve poi bene l'esercizio.

5. Ulteriori prove ed ulteriori risultati.

I risultati ottenuti rivelano che l'ipotesi del paragrafo 1. potrebbe non essere del tutto così scontata.

Ma c'è un'obiezione possibile, e cioè che il problema-esercizio dato, visti i risultati, sembra essere *troppo difficile*. Ebbene: il testo era stato fatto preliminarmente vedere ad insegnanti (non coinvolti in alcun modo nell'esperienza) ed essi avevano detto che, a parte eventuali errori di calcolo legati al fatto che venivano risultati "non esatti", si trattava di testo adatto ed usuale. Ho allora effettuato⁶ una prova per così dire ausiliaria in III elementare (allievi di 8-9 anni), proponendo il seguente semplicissimo testo: «Un cartolaio compra 4 x corte, 6 x lunghe e 12 x medie. Quante x compra in tutto?».

Ad alcuni bambini è stato dato il test T1' nel quale x era sostituito da "matite", ad altri il test T2' nel quale x era sostituito da "orettole". Poiché si trattava solo di una prova "ausiliaria", essa è stata fatta solo su 15 bambini; il risultato è stato il seguente:

degli 8 bambini cui è stato dato il test T1', 7 rispondono in modo esatto (uno somma invece solo i primi due numeri dati: 4+6);

dei 7 bambini cui è stato dato il test T2', 6 rispondono in modo esatto (uno invece si comporta esattamente nello stesso modo detto nella parentetica precedente, eseguendo: 4+6).

Durante la successiva intervista fatta a tutti e 7 i bambini del gruppo T2', anche dopo esplicita richiesta, *nessuno* di essi denuncia malessere per la parola "orettole".

6. Prime considerazioni e un dubbio.

⁶ Grazie ad una idea di Giorgio Gabellini, maestro a Cattolica e membro del NRD di Bologna.

Quel che emerge in modo significativo, soprattutto grazie alle interviste, è che i bambini re-interpretano la parola sconosciuta, dandole connotati semantici diversi: o attribuendole un significato per così dire "costante" (verdura) o accettandola come qualche cosa di sconosciuto, ma attendibilmente presente nella realtà descritta dal testo del problema cioè, per così dire, un significato "variabile" nel contesto, ma definibile all'occorrenza (oggetti).

Anche quando le risposte alle interviste non sono così chiare e palesi, è del tutto evidente che il bambino supera quel supposto ostacolo, attribuendo un senso al termine. È come se scattasse una clausola del contratto didattico secondo la quale non può accadere che l'insegnante inserisca nel testo una parola inesistente. Si tratta di una clausola appartenente al gruppo che amo definire "fiducia nell'insegnante". È piuttosto plausibile, per il bambino, che si tratti di una parola che lui non conosce, ma che certamente significa qualche cosa; il che sembra non impedire affatto la risoluzione.

Ma sorge allora un dubbio: forse la parola "orettola" ha un suono che vagamente richiama cose reali, esistenti, ha per così dire una forma "buona"; dopo di che, grazie alla clausola del contratto didattico vista sopra, si potrebbe pensare che *il risultato ottenuto è legato alla parola scelta*. È cioè lecito pensare che se si fosse scelta una parola *evidentemente* inesistente, avremmo potuto avere risultati diversi.

In altre parole: il bambino non sa che cosa significhi "orettola" ma, dando per scontato che esista, se ne fa comunque una qualche immagine più o meno confusa, più o meno esplicita. E ciò sembra bastare per tornare a dare ragione a Paivio, Johnson-Laird e Vergnaud e pensare che i buoni risolutori si siano *comunque* fatti un modello mentale della situazione.

7. Una nuova prova e relativi commenti.

Ho allora effettuato una nuova prova, sempre in V elementare, coinvolgendo 38 bambini (4 mezze classi). Con le stesse modalità, ho proposto il testo T3, identico ai T1 e T2, ma nel quale, in luogo di "matita" ed "orettola" ho posto: "przextqzyw".

I risultati sono stati i seguenti:

sbagliano completamente: 29%

non eseguono: 12%

risolvono in modo esatto (a parte errori di calcolo e forma): 32%

sbagliano perché calcolano il guadagno totale: 27%.

Se suddividiamo questi risultati secondo quanto abbiamo già visto in precedenza, cioè nelle due classi E (esatto o sbagliato perché calcolano il guadagno totale) ed N (sbagliato del tutto o non eseguito), otteniamo:

E: 59%

N: 41%

e dunque, visto l'esiguo numero di allievi sottoposti alla prova, ancora grosso modo lo stesso tipo di percentuali.

Questo sembra eliminare ogni dubbio. In particolare, solo 2 allievi denunciano spontaneamente per iscritto il disagio provato alla lettura della "strana parola".

Forte dell'esperienza acquisita nelle interviste e dell'importanza che esse rivestono in questo genere di prove per avere una reale idea di quel che pensano davvero gli allievi, ho sottoposto ad intervista (quasi) tutti gli allievi. Il 26% degli studenti intervistati mette in evidenza di essersi sorpreso al momento della lettura di quella "strana parola", ma quasi tutti ammettono di essersi dati una giustificazione: è una "marca di penne"; sono "degli elementi"; è "della roba"; è "un dato"; è "una marca di caramelle" (venduta da un cartolaio!); è "un modo per scrivere qualcosa"; e così via. [*Non c'è alcuna relazione tra queste scelte e la buona o cattiva risoluzione del problema*]. È stato per me sorprendente ritrovare una casistica semplicissima e del tutto simile a quella già vista per "orettole": o sono per così dire "costanti" (marca di penne, marca di caramelle) o sono per così dire "variabili" che, all'occorrenza, sono precisabili (degli elementi, della roba, un dato, un modo per scrivere qualcosa).

8. Una prima conclusione.

In sostanza, mi sembra di poter ammettere che la posizione descritta in **1.** sia contraddetta da queste prove. Lo studente sembra non avere una reale necessità di farsi un modello *preciso in ogni dettaglio* della situazione descritta nel testo del problema-esercizio standard per poter tentare di risolverlo; quel che gli serve sembra

essere solo un vago modello della situazione, anche senza troppi dettagli. Egli, per così dire, supera l'ostacolo della mancanza di un dato significativo, immaginando l'evolversi della scena, piuttosto che i singoli dettagli di essa.

C'è poi un punto di un certo interesse.

Mi sembra si possa affermare che il contratto didattico legato al problema di ... risolvere un problema sia molto forte circa la necessità di fare calcoli, piuttosto che sulla necessità di immaginare nel dettaglio la scena. Come se il vero problema non fosse quello descritto nel testo, ma quello dell'impegno dello studente. A questo proposito è di grande importanza e rivelatrice la frase di un bambino intervistato, il quale, dopo la solita insistenza dell'intervistatore per avere un parere circa la presenza di una parola così strana, ha esclamato: «L'importante non è capire, ma risolvere il problema».

Il contratto didattico, ma anche il modello generale di problema che il bambino si è fatto con la pratica, sembrano rendere superfluo anziché così strettamente necessario il formarsi di un modello della situazione, nel corso della risoluzione di un problema.

9. Altre prove, per terminare.

A mo' di prova, ho eseguito i test T1 (matite) e T2 (orettole) in classi I media (età degli allievi: 11-12 anni), ma per un totale di soli 68 allievi.

Suddividendo i risultati direttamente nelle sole classi E ed N, ecco le percentuali ottenute:

T1: E 41%, N 59%

T2: E 49%, N 51%.

Addirittura la percentuale dei successi aumenta nel passaggio da "matite" ad "orettole"; ma penso di dover ritenere questo risultato del tutto casuale, legato al numero molto basso di studenti esaminati. In casi di questo genere, 2-3 protocolli possono modificare in maniera considerevole le percentuali.⁷

⁷ La prova è stata fatta anche in un Liceo Classico Sperimentale (in I classe, allievi di 14-15 anni), nel caso completo dei tre test T1, T2 e T3. La eccessiva facilità del problema ha fatto sì che quasi tutti i risultati siano stati positivi (cioè della classe E). I

Quel che interessa è però il fatto che si è avuto lo stesso tipo di comportamento: la parola "orettola" è gestita con assoluta indifferenza. Alcuni ragazzi la reinterpretano in modo personale, come abbiamo già visto in precedenza. Divertente ma anche molto interessante in particolare la reinterpretazione di un ragazzo che suppone che le "orettole" siano delle "bettole" e che dunque al cartolaio spetti venderle; a mio avviso ciò significa che non solo le parole che per l'adulto sono inesistenti devono essere interpretate... Quello studente ha letto "orettole", il suono gli ha ricordato qualche cosa di già sentito e semanticamente lecito, "bettole", parola della quale però ignora il reale significato. Dunque non si è fatto un modello mentale dettagliato della situazione, né per quanto riguarda le "orettole" né evidentemente per le "bettole".

A volte l'intervistatore calcava un po' la mano nella speranza che qualche studente esprimesse un parere sul legame tra difficoltà di risolvere il problema, difficoltà di immaginarsi la situazione e parola in esame; alla domanda provocatoria fatta ad un buon solutore: «Hai qualche commento da fare sul testo?», questi ha riletto il testo ed ha risposto affermando che: «Il testo era spiegato bene».

10. Commento conclusivo.

A conclusione del lavoro, una osservazione.

In III elementare nessuno studente denuncia la presenza di parole senza senso o di cui ignora il senso; in V elementare gli studenti che effettuano tale denuncia sono di più, ma non moltissimi di più; in I media aumentano in modo netto; in I superiore lo fanno praticamente tutti.

Sembra quasi che, mentre permane il fatto che per risolvere il problema (bene o male) a poco serva farsi un modello mentale preciso in tutti i particolari della situazione, l'attenzione alle singole parole aumenti con l'età. Non si tratta dunque

ragazzi hanno, nella stragrande maggioranza, accettato in modo consapevole, divertito ed ironico, le "parole strane", ma senza farsene un dramma. Alcuni allievi se le sono reinventate, altri le hanno considerate solo stranezze senza troppa importanza.

della necessità di farsi un modello, ma di semplice attenzione, capacità critica, o cose simili.

Una ricerca che necessita di prove su così larga scala è enormemente facilitata dall'aiuto di amici-collaboratori competenti e di sicura affidabilità. Devo ringraziare per la dedizione e la disponibilità molti insegnanti ed alcuni membri del N.R.D. di Bologna, tra i quali principalmente: Gianna Foroni, Giorgio Gabellini e Laura Giovannoni. Ringrazio anche per i suggerimenti e le letture critiche: Giorgio Bagni e Berta Martini.

Bibliografia.

[D'Amore 1993] B. D'Amore, *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem-solving*, Angeli, Milano 1993.

[Johnson-Laird 1983] P. N. Johnson-Laird, *Mental Models*, Cambridge University Press, Cambridge 1983 [trad. it. Il Mulino, Bologna 1988].

[Paivio 1986] A. Paivio, *Mental representations: A dual coding approach*, Clarendon Press, Oxford 1986.

[Vecchio 1990] L. Vecchio, *Breve storia delle ricerche sull'immagine mentale*, in: L. Vecchio (a cura di), *Le immagini mentali*, La Nuova Italia, Firenze 1990, pagg. 15-48.

[Vergnaud 1985] G. Vergnaud, *Psicologia cognitiva ed evolutiva. Ricerca in didattica della matematica: alcune questioni teoriche e metodologiche*, in: L. Chini Artusi (a cura di), *Numeri ed operazioni nella scuola di base*, Zanichelli-UMI, Bologna 1985, pagg. 20-45.